

特異積分方程式法による異種材料接合界面に 接する 3 次元き裂の理論的解析*

秦 太 験^{*1}, 野 田 尚 昭^{*2}

Application of Hypersingular Integral Equation Method to a Three-Dimensional Crack Terminating at an Interface

Taiyan QIN and Nao-aki NODA^{*3}

^{*3}Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper a three dimensional crack perpendicular to and terminating at a bimaterial interface is considered under general mixed-mode loading. The solution utilizes the body force method and requires Green's functions for perfectly bonded elastic half planes. The formulation leads to a system of hypersingular integral equations whose unknowns are three modes of crack opening displacements. The main-part analytical method is used to investigate the characteristics of stress singularity around the crack front touching the interface. An explicit closed-form expression is given for the singular stress field, which is controlled by general stress intensity factors. The relations between three modes of crack opening displacements and stress intensity factors are also discussed.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Crack, Composite Material, Hypersingular Integral Equation

1. 緒 言

近年、複合材料等の新しい材料の使用が、各種工業分野に広がることに伴って、異種材料接合界面の強度の正確な評価が重要となってきた。異種材料接合界面近傍のき裂の応力拡大係数やき裂開口変位等を求める破壊力学的研究は多くなされている^{(1)~(4)}が、それらの大部分は 2 次元問題の解析にとどまっている。一般に、3 次元問題に関しては、数学的な困難から、有効な解析手法は少ない。例えば、Lee-Keer⁽³⁾は、異種接合界面に接する半だ円き裂がモード I 荷重を受ける問題を、体積力法の特異積分方程式で表現し解析を行なっている。しかし、界面に接する側のき裂先端近傍での特異応力場の考察はなされておらず、従って、その特異応力の強さを示す一般化応力拡大係数は与えられていない。また、著者らの一人は、体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度と多項式で近似する方法を用いて、均質材中の 3 次元き裂先端の精度の高い滑らかな応力拡大係数の分布を求めてきたが^{(5)~(7)}、異種

接合界面上やその近傍に存在する 3 次元き裂の問題はこれまで取り扱っていない。

そこで本研究では、Lee-Keer⁽³⁾ および Chen-Tang⁽⁸⁾ らが用いた表現を拡張して、まず異種材料界面に垂直に接する 3 次元き裂問題がより一般的な混合モード荷重を受ける問題を、体積力法の特異積分方程式で表現する。次に、界面に接するき裂先端近傍での応力特異性や特異応力場を超特異積分方程式の主要部を評価することによって求める。得られた表現は、界面に垂直に接する 3 次元き裂問題の数値解析を今後行う際に有用である。

2. 異種材料接合界面に垂直に接する 3 次元き裂の特異積分方程式

図 1 のように x_1x_3 平面を接合界面とする接合無限体の、右側の材料 1 の弾性定数を (μ_1, ν_1) 、左側の材料 2 の弾性定数を (μ_2, ν_2) とする。いま、 x_1x_3 平面に接する 3 次元き裂が x_1x_2 平面上に存在し、き裂面に応力 $\sigma_{13}(\mathbf{x}) = -p_1(\mathbf{x})$, $\sigma_{23}(\mathbf{x}) = -p_2(\mathbf{x})$, $\sigma_{33}(\mathbf{x}) = -p_3(\mathbf{x})$ を受けるものとする。体積力法の考え方に基づく Lee-Keer⁽³⁾ および Chen-Tang

⁽⁸⁾ らが用いた表現を用いれば、材料 1 中の変位は式 (1) で表される。

* 原稿受付 2001 年 4 月 26 日。

^{*1} China Agricultural University (Beijing 100083, P. R. China) (元：九州工業大学工学部)。

^{*2} 正員、九州工業大学工学部 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

$$u_k(\mathbf{x}) = \int_S T_{ki}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}) ds(\boldsymbol{\xi}) \quad i, k = 1, 2, 3 \quad \dots (1)$$

$$T_{ki}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left\{ \frac{2\mu_1\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \delta_{3i} + \mu_1 \left[\frac{\partial G_{ki}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_3} + \frac{\partial G_{k3}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \right] \right\}_{\xi_3=0} \quad j = 1, 2, 3 \quad \dots (2)$$

ここで、 $\bar{u}_i = u_i^+ - u_i^-$ は i 方向のき裂上下面の変位差（または食違い）であり、 $G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ は着力点 $\boldsymbol{\xi}$ における x_i 方向単位集中心力によって生じる、注目点 $\mathbf{x}$ における x_i 方向変位を表現するグリーン関数^{(3), (8)}である。そして、このとき、材料1中の応力は次式で表される。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_S S_{kij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \bar{u}_k(\boldsymbol{\xi}) ds(\boldsymbol{\xi}) \quad \dots (3)$$

$$S_{kij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{2\mu_1\nu_1}{1-2\nu_1} \frac{\partial T_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu_1 \left[\frac{\partial T_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_i} \right] \quad l = 1, 2, 3 \quad \dots (4)$$

材料2中の点の応力と変位も同様に表される。結局、き裂面の境界条件を表す積分方程式は以下のようになる。

$$\frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1+1)} \int_S K_{mn}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \bar{u}_n(\boldsymbol{\xi}) ds(\boldsymbol{\xi}) = -p_m(\mathbf{x}) \quad m, n = 1, 2 \quad \mathbf{x} \in S \quad \dots (5a)$$

$$\frac{\mu_1}{\pi(\kappa_1+1)} \int_S \left[\frac{1}{r_1^3} + K_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \right] \bar{u}_3(\boldsymbol{\xi}) ds(\boldsymbol{\xi}) = -p_3(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in S \quad \dots (6a)$$

ここで、 $\int$ は発散積分の有限部分を表す。

$$K_{11}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\kappa_1-1}{2r_1^3} + \frac{3(3-\kappa_1)(x_1-\xi_1)^2}{4r_1^5} + \frac{2A\kappa_1(\kappa_1+6)+2B-5C}{4r_2^3} - \frac{24Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{3(4A\kappa_1-C)(x_2+\xi_2)^2}{4r_2^5} \\ + \frac{30Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)^2}{r_2^7} - \frac{3(2A\kappa_1+A\kappa_1^2+B-2C)}{2r_2r_3^2} \quad \dots (5b)$$

$$K_{12}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (x_1-\xi_1) \left[\frac{3(3-\kappa_1)(x_2-\xi_2)}{4r_1^5} + \frac{3C(x_2+\xi_2)}{4r_2^5} + \frac{30Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)}{r_2^7} + \frac{3A(\kappa_1-1)x_2}{r_2^5} + \frac{1}{2}(A\kappa_1+B-C) \left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3} \right) \right] \quad \dots (5c)$$

$$K_{21}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = (x_1-\xi_1) \left[\frac{3(3-\kappa_1)(x_2-\xi_2)}{4r_1^5} + \frac{3(4A+4A\kappa_1-C)(x_2+\xi_2)}{4r_2^5} + \frac{3A(\kappa_1-1)x_2}{r_2^5} - \frac{30Ax_2\xi_2(x_2+\xi_2)}{r_2^7} \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(A\kappa_1+B-C) \left(\frac{1}{r_2^2r_3^2} + \frac{1}{r_2^3r_3} \right) \right] \quad \dots (5d)$$

$$K_{22}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\kappa_1-1}{2r_1^3} + \frac{3(3-\kappa_1)(x_2-\xi_2)^2}{4r_1^5} + \frac{A+B-C}{2r_2^3} + \frac{3(C-4A)(x_2+\xi_2)^2}{4r_2^5} + \frac{24Ax_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{30Ax_2\xi_2(x_1-\xi_1)^2}{r_2^7} \quad \dots (5e)$$

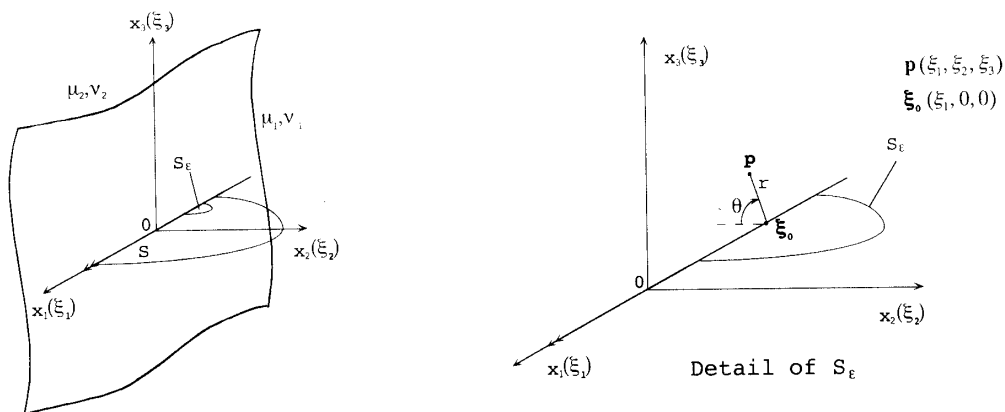


Fig.1 Problem configuration

$$K_0(\mathbf{x}, \xi) = \frac{2C - 3A(\kappa_1^2 - 2\kappa_1 + 3)}{2r_2^3} + \frac{3A[12x_2\xi_2 - (3 - \kappa_1)(\kappa_1 - 1)(x_2 + \xi_2)^2]}{2r_2^5} + \frac{3(2A\kappa_1 + A\kappa_1^2 + B - 2C)}{2r_2r_3^2} \quad \dots (6b)$$

ここで, $r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}$, $r_2 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2}$, $r_3 = r_2 + x_2 + \xi_2$, $A = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \kappa_1\mu_2)$, $B = (\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)$, $S = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$, $C = S(\kappa_1 + 1)$, $\kappa = 3 - 4\nu$ である. また, 式(6a), (6b)の表現はLee and Keer⁽³⁾によって与えられたものと一致する. また, 式(5a)~(5e)の表現はLee-Farris-Keer⁽⁹⁾の論文の表現で $h \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$ とした場合に一致する.

3. き裂先端近傍の応力特異性

式(5), (6)において, k方向のき裂上下面の変位差は x_1 軸上の点 ξ_0 の近傍で以下のように表される.

$$\bar{u}_k(\xi) = D_k(\xi_0) \xi^{\lambda_k} \quad 0 < \text{Re}(\lambda_k) < 1 \quad \dots (7)$$

ここで, $D_k(\xi_0)$ は x_1 軸上の点 ξ_0 に関する定数, λ_k は特異性指数である. 積分の主要部を以下の関係を用いて評価する⁽¹⁰⁾.

$$\int_{S_e} \frac{\bar{u}_1}{r_1^3} d\xi_1 d\xi_2 \approx -2\pi\lambda_1 D_1(\xi_0) x_2^{\lambda_1-1} \cot(\lambda_1\pi) \quad \dots (8)$$

$$\int_{S_e} \frac{(x_1 - \xi_1)^2}{r_1^5} \bar{u}_1 d\xi_1 d\xi_2 \approx -\frac{2}{3}\pi\lambda_1 D_1(\xi_0) x_2^{\lambda_1-1} \cot(\lambda_1\pi) \quad \dots (9)$$

$$\int_{S_e} \frac{(x_2 - \xi_2)^2}{r_1^5} \bar{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \approx -\frac{4}{3}\pi\lambda_2 D_2(\xi_0) x_2^{\lambda_2-1} \cot(\lambda_2\pi) \quad \dots (10)$$

$$\int_{S_e} K_{21}(\mathbf{x}, \xi) \bar{u}_1 d\xi_1 d\xi_2 = \int_{S_e} K_{12}(\mathbf{x}, \xi) \bar{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 = 0 \quad \dots (11)$$

$$\int_{S_e} \frac{\bar{u}_2}{r_2^3} d\xi_1 d\xi_2 \approx 2\pi\lambda_2 D_2(\xi_0) x_2^{\lambda_2-1} \frac{1}{\sin(\lambda_2\pi)} \quad \dots (12)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_2\xi_2}{r_2^5} \bar{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{2}{9}\pi\lambda_2(1 - \lambda_2^2) D_2(\xi_0) x_2^{\lambda_2-1} \frac{1}{\sin(\lambda_2\pi)} \quad \dots (13)$$

$$\int_{S_e} \frac{(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^5} \bar{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{4}{3}\pi\lambda_2 D_2(\xi_0) x_2^{\lambda_2-1} \frac{1}{\sin(\lambda_2\pi)} \quad \dots (14)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_2\xi_2(x_1 - \xi_1)^2}{r_2^7} \bar{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{8}{45}\pi\lambda_2(1 - \lambda_2^2) D_2(\xi_0) x_2^{\lambda_2-1} \frac{1}{\sin(\lambda_2\pi)} \quad \dots (15)$$

$$\int_{S_e} \frac{x_2\xi_2(x_2 + \xi_2)^2}{r_2^7} \bar{u}_1 d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{2}{45}\pi\lambda_1(1 - \lambda_1^2) D_1(\xi_0) x_2^{\lambda_1-1} \frac{1}{\sin(\lambda_1\pi)} \quad \dots (16)$$

$$\int_{S_e} \frac{\bar{u}_3}{r_2(r_2 + x_2 + \xi_2)^2} d\xi_1 d\xi_2 \approx \frac{2}{3}\pi\lambda_3 D_3(\xi_0) x_2^{\lambda_3-1} \frac{1}{\sin(\lambda_3\pi)} \quad \dots (17)$$

ここで S_e は点 ξ_0 の近くのき裂面の微小面積である. 式(5), (6)より $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ならびに式(18), (19)の特性方程式が得られる.

$$4A\lambda^2 + 2\cos(\lambda\pi) - A - B = 0 \quad \dots (18)$$

$$\cos(\lambda_1\pi) = S \quad \dots (19)$$

式(18)は, 異材接合界面に接する2次元き裂問題に関して与えられた特性方程式⁽¹⁴⁾に一致する. また, 式(19)は, 面外せん断問題に対して与えられた特性方程式⁽²⁾に一致する.

4. 異種材料接合界面上のき裂先端近傍の特異応力

式(5), (6)で注目点 $\mathbf{x}$ が x_1x_2 平面上にない場合の表現に基づいて, 接合界面に接するき裂先端近傍の特異応力場を求

めれば、それらは以下のように求まる。材料 1 の界面に接するき裂先端近傍の点の応力に関して、以下の関係⁽³⁰⁾を利用する。

$$\int_{s_e} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{6x_3^2}{r_1^5} - \frac{15x_3^4}{r_1^7} \right) \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{2\pi\lambda(1-\lambda)D_3(\xi_0)r^{\lambda-1}}{\sin(\lambda\pi)} \sin\theta \sin(2-\lambda)\theta \quad \dots (20)$$

$$\int_{s_e} \frac{\tilde{u}_3}{r_2^3} d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{2\pi D_3(\xi_0)r^{\lambda-1} \sin\lambda(\pi-\theta)}{\sin(\lambda\pi)\sin\theta} \quad \dots (21)$$

$$\int_{s_e} \frac{(x_2 + \xi_2)^2 \tilde{u}_3}{r_2^5} d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{2\pi D_3(\xi_0)r^{\lambda-1}}{3\sin(\lambda\pi)\sin\theta} [\sin\lambda(\pi-\theta) - \lambda\sin\theta \cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta)] \quad \dots (22)$$

$$\int_{s_e} \left(\frac{12x_3^2}{r_2^5} - \frac{15x_3^4}{r_2^7} - \frac{15(x_2 + \xi_2)^2 x_3^2}{r_2^7} \right) \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 \equiv 0 \quad \dots (23)$$

$$\int_{s_e} \left(\frac{18x_2\xi_2}{r_2^5} - \frac{180x_2\xi_2x_3^2}{r_2^7} + \frac{210x_2\xi_2x_3^4}{r_2^9} \right) \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{4\pi\lambda(1-\lambda^2)D_3(\xi_0)r^{\lambda-1} \cos\theta \cos(\lambda\pi + 2\theta - \lambda\theta)}{\sin(\lambda\pi)} \quad \dots (24)$$

$$\int_{s_e} \left(\frac{3}{r_2^3} - \frac{6x_3^2}{r_2^5} - \frac{12x_3^4}{r_2^7} + \frac{6x_3^4}{r_2^3} + \frac{6x_3^4}{r_2^4} + \frac{3x_3^4}{r_2^5} \right) \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 \equiv -\frac{2\pi\lambda D_3(\xi_0)r^{\lambda-1} \cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta)}{\sin(\lambda\pi)} \quad \dots (25)$$

$$\int_{s_e} (x_2 - \xi_2)x_3 \left(\frac{3}{r_1^5} - \frac{15x_3^2}{r_1^7} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \equiv -\frac{2\pi\lambda(1-\lambda)D_2(\xi_0)r^{\lambda-1}}{\sin(\lambda\pi)} \sin\theta \cos(2-\lambda)\theta \quad \dots (26)$$

$$\int_{s_e} \frac{(x_2 + \xi_2)x_3 \tilde{u}_2}{r_2^5} d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0)r^{\lambda-1}}{3\sin(\lambda\pi)} \sin(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta) \quad \dots (27)$$

$$\int_{s_e} \frac{x_2x_3\tilde{u}_2}{r_2^5} d\xi_1 d\xi_2 \equiv -\frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0)r^{\lambda-1} \cos\theta}{3\sin(\lambda\pi)\sin^2\theta} [\sin(\lambda\pi - \lambda\theta) + \lambda\sin\theta \cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta)] \quad \dots (28)$$

$$\int_{s_e} \frac{x_2x_3\tilde{u}_2}{r_2^7} d\xi_1 d\xi_2 \equiv -\frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0)r^{\lambda-1} \cos\theta}{3\sin(\lambda\pi)\sin^2\theta} [3\sin(\lambda\pi - \lambda\theta) + 3\lambda\sin\theta \cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta) + \lambda(1-\lambda)\sin^2\theta \sin(\lambda\pi + 2\theta - \lambda\theta)] \quad \dots (29)$$

$$\int_{s_e} \frac{x_3(x_2 + \xi_2)^3 \tilde{u}_2}{r_2^7} d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0)r^{\lambda-1}}{15\sin(\lambda\pi)} [3\sin(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta) + (1-\lambda)\sin\theta \cos(\lambda\pi + 2\theta - \lambda\theta)] \quad \dots (30)$$

$$\int_{s_e} x_2\xi_2(x_2 + \xi_2)x_3 \left(\frac{90}{r_2^7} - \frac{210x_3^2}{r_2^9} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{4\pi\lambda(1-\lambda^2)D_2(\xi_0)r^{\lambda-1} \cos\theta \sin(\lambda\pi + 2\theta - \lambda\theta)}{\sin(\lambda\pi)} \quad \dots (31)$$

$$\int_{s_e} \frac{1}{2}x_3 \left(\frac{3}{r_2^3} + \frac{3}{r_2^3} - \frac{2x_3^2}{r_2^3} - \frac{3x_3^2}{r_2^4} - \frac{3x_3^2}{r_2^5} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 \equiv -\frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0)r^{\lambda-1} \cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta)}{\sin(\lambda\pi)} \quad \dots (32)$$

ここで、 $r_1 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + x_3^2}$ 、 $r_2 = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2)^2 + x_3^2}$ 、 $r_3 = r_2 + x_2 + \xi_2$ である。式 (3) より材料 1 について以下の応力の表現を得る。

$$\sigma_{33}^1(\mathbf{p}) = \frac{K_I}{(2r)^{1-\lambda}} f_{331}^1(\theta) + \frac{K_{II}}{(2r)^{1-\lambda}} f_{332}^1(\theta) \quad \pi/2 \leq |\theta| \leq \pi \quad \dots (33)$$

$$f_{331}^1(\theta) = \frac{1}{\omega} \{ 2\cos(1-\lambda)\theta + 2(1-\lambda)\sin\theta \sin(2-\lambda)\theta + [A(1-2\lambda)(2+\lambda) + B]\cos(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta) + A(1-\lambda)(1-2\lambda)\cos(\lambda\pi + 3\theta - \lambda\theta) \} \quad \dots (34)$$

$$f_{332}^1(\theta) = \frac{1}{\omega} \{ -2(1-\lambda)\sin\theta \cos(2-\lambda)\theta + [2A\kappa_1 - 3A + B + 2A\gamma(1+\lambda) + 2A(1-\lambda)(2+\lambda)]\sin(\lambda\pi + \theta - \lambda\theta) + 2A(1-\lambda)(2+\gamma + \lambda)\sin(\lambda\pi + 3\theta - \lambda\theta) \} \quad \dots (35)$$

ここで、 $\omega = [2 - A - B - 2\lambda(A - B)]$ 、 $\gamma = (3 - \kappa_1)/2(\kappa_1 - 1)$ である。一方、材料 2 の界面に接するき裂先端近傍の点の応力に関して、式 (24) と以下のような関係を利用する。

$$\int_{s_e} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{3x_3^2}{r_1^5} \right) \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 \equiv \frac{2\pi\lambda D_3(\xi_0)r^{\lambda-1}}{\sin(\lambda\pi)} \cos(1-\lambda)\theta \quad \dots (36)$$

$$\int_{S_1} \left[\frac{3}{r_1^3 r_4^2} - \frac{6x_3^2}{r_1^3 r_4^2} - \frac{12x_3^2}{r_1^3 r_4^2} + \frac{6x_3^4}{r_1^3 r_4^2} + \frac{6x_3^4}{r_1^3 r_4^2} + \frac{3x_3^4}{r_1^3 r_4^2} \right] \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{2\pi\lambda D_1(\xi_0) r^{\lambda-1} \cos(1-\lambda)\theta}{\sin(\lambda\pi)} \quad \dots (37)$$

$$\int_{S_1} \left[\frac{3}{r_1^3 r_4^2} + \frac{3}{r_1^3 r_4^2} - \frac{18x_3^2}{r_1^3 r_4^2} - \frac{18x_3^2}{r_1^3 r_4^2} - \frac{12x_3^2}{r_1^3 r_4^2} + \frac{15x_3^4}{r_1^3 r_4^2} + \frac{15x_3^4}{r_1^3 r_4^2} + \frac{12x_3^4}{r_1^3 r_4^2} + \frac{6x_3^4}{r_1^3 r_4^2} \right] \tilde{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{\pi\lambda(1-\lambda)D_3(\xi_0) r^{\lambda-1}}{\sin(\lambda\pi)} [\cos(1-\lambda)\theta + \cos(3-\lambda)\theta] \quad \dots (38)$$

$$\int_{S_1} \frac{(x_2 - \xi_2)x_3 \tilde{u}_2}{r_1^5} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0) r^{\lambda-1}}{3\sin(\lambda\pi)} \sin(1-\lambda)\theta \quad \dots (39)$$

$$\int_{S_1} \frac{(x_2 - \xi_2)x_3^3}{r_1^7} \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{\pi\lambda D_2(\xi_0) r^{\lambda-1}}{15\sin(\lambda\pi)} [-(3-\lambda)\sin(1-\lambda)\theta + (1-\lambda)\sin(3-\lambda)\theta] \quad \dots (40)$$

$$\int_{S_1} x_3 \left(\frac{3}{r_1^3 r_4^2} + \frac{3}{r_1^3 r_4^2} - \frac{2x_3^2}{r_1^3 r_4^2} - \frac{3x_3^2}{r_1^3 r_4^2} - \frac{3x_3^2}{r_1^3 r_4^2} \right) \tilde{u}_2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{2\pi\lambda D_2(\xi_0) r^{\lambda-1} \sin(1-\lambda)\theta}{\sin(\lambda\pi)} \quad \dots (41)$$

材料 2 については、モード I ～ III の応力拡大係数の表現を与えるため応力 σ_{13}^2 , σ_{23}^2 , σ_{33}^2 を求めると以下ようになる。

$$\sigma_{13}^2(\mathbf{p}) = -\frac{K_{III}}{(2r)^{1-\lambda_1}} \cos(1-\lambda_1)\theta \quad -\pi/2 < \theta \leq \pi/2 \quad \dots (42)$$

$$\sigma_{23}^2(\mathbf{p}) = \frac{K_I}{(2r)^{1-\lambda}} f_{231}^2(\theta) + \frac{K_{II}}{(2r)^{1-\lambda}} f_{232}^2(\theta) \quad -\pi/2 < \theta \leq \pi/2 \quad \dots (43)$$

$$\sigma_{33}^2(\mathbf{p}) = \frac{K_I}{(2r)^{1-\lambda}} f_{331}^2(\theta) + \frac{K_{II}}{(2r)^{1-\lambda}} f_{332}^2(\theta) \quad -\pi/2 < \theta \leq \pi/2 \quad \dots (44)$$

$$f_{231}^2(\theta) = \frac{1}{\omega} \{ [\Gamma(\kappa_1 + B) - (1-A)(\kappa_1 - 1) - \lambda(1-2A+B)] \sin(1-\lambda)\theta - (1-\lambda)(1-B)\sin(3-\lambda)\theta \} \quad \dots (45)$$

$$f_{232}^2(\theta) = -\frac{1}{\omega} 2(1-\lambda)(1-B)\sin\theta\sin(2-\lambda)\theta + \cos(1-\lambda)\theta \quad \dots (46)$$

$$f_{331}^2(\theta) = -\frac{1}{\omega} 2(1-\lambda)(B-1)\sin\theta\sin(2-\lambda)\theta + \cos(1-\lambda)\theta \quad \dots (47)$$

$$f_{332}^2(\theta) = \frac{1}{\omega} [(A-2B+1+2A\lambda-B\lambda-\lambda)\sin(1-\lambda)\theta - (1-B)(1-\lambda)\sin(3-\lambda)\theta] \quad \dots (48)$$

ここで、 $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$ のとき、式 (42) ～ (48) は以下のように通常のき裂の表現に一致する。

$$\sigma_{13}(\mathbf{p}) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad \dots (49)$$

$$\sigma_{23}(\mathbf{p}) = -\frac{K_I}{2\sqrt{2r}} \sin\theta \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad \dots (50)$$

$$\sigma_{33}(\mathbf{p}) = \frac{K_I}{\sqrt{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \sin\theta \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{2\sqrt{2r}} \sin\theta \cos \frac{3\theta}{2} \quad \dots (51)$$

異材接合界面における一般化応力拡大係数は応力 σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} より、次式で定義される。また、それらは式 (7) の $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{u}_3$ から以下のように求まる。

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{33}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} (2r)^{1-\lambda} = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{2^{1-\lambda} \lambda \mu_1 \omega \tilde{u}_3}{(\kappa_1 + 1) \sin(\lambda\pi) \xi_2^\lambda} \quad \dots (52)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{23}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} (2r)^{1-\lambda} = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{2^{1-\lambda} \lambda \mu_1 \omega \tilde{u}_2}{(\kappa_1 + 1) \sin(\lambda\pi) \xi_2^\lambda} \quad \dots (53)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{13}(r, \theta) \Big|_{\theta=0} (2r)^{1-\lambda_1} = \lim_{\xi_2 \rightarrow 0} \frac{2^{2-\lambda_1} \mu_1 \mu_2 \tilde{u}_1}{(\mu_1 + \mu_2) \sin(\lambda_1\pi) \xi_2^{\lambda_1}} \quad \dots (54)$$

5. 結 言

本研究では、異種接合界面上およびその近傍のき裂の解析がこれまで2次元問題を中心になされていることを考慮して、異種材料界面近傍の3次元き裂問題を理論的に考察した。

(1) モードI荷重を受ける問題を扱ったLee-Keer⁽³⁾およびChen-Tang⁽⁸⁾らが用いた表現を拡張して、まず界面に垂直に接する3次元き裂問題がより一般的な混合モード荷重を受ける問題を、体積力法の特異積分方程式で表現した。得られた結果はLee-Farris-Keerらの表現⁽⁹⁾と一致する。

(2) 超特異積分方程式の主要部を評価することによって、3次元き裂が界面に接する場合の特性方程式を求め、2次元き裂と同じ特性方程式で支配されることを示した。

(3) 3次元き裂が界面に接する場合の特異応力場の表現を閉じた形で示した。また、3次元き裂が界面に接する場合の一般化応力拡大係数とき裂開口変位との関係を示した。

本論文で考察した内容は、異種材料界面近傍の3次元的な欠陥やき裂を破壊力学的に評価する際有用となる。具体的な解析例は今後発表の予定である。

謝 辞

本研究を行うに際して井上科学技術振興財団、九州工業大学75周年記念事業、中部電力基礎技術研究所研究助成の援助を受けた。深く謝意を表する。

文 献

- (1) Cook, T. S. and Erdogan, F., Stresses in bonded materials with a crack perpendicular to the interface, *Int. J. Engng. Sci.*, **10**(1972), 677-697
- (2) Erdogan, F. and Cook, T. S., Antiplane shear crack terminating and going through a bimaterial interface, *Int. J. Fract.*, **10**(1974), 227-240
- (3) Lee, J. C. and Keer, L. M., Study of a three-dimensional crack terminating at an interface, *J. Appl. Mech.*, **53**(1986), 311-316
- (4) 陳耿珩・西谷弘信, 接合半無限板の界面にき裂端を持つき裂の応力拡大係数, *機論*, **59**-558, A(1993), 325-331.
- (5) 野田尚昭・小林公浩・三好伸介, 特異積分方程式を用いた傾斜半だ円表面き裂の応力拡大係数の分布の解析, *機論*, **63**-615, A(1997), 2345-2350.
- (6) 王 清・野田尚昭・本田昌章・陳 夢成, 特異積分方程式法による長方形き裂の応力拡大係数の分布の解析, *機論*, **66**-650, A(2000), 1922-1927.
- (7) 野田尚昭・木原利彰, 混合モード負荷を受ける長方形および半だ円表面き裂の応力拡大係数の分布の解析, *機講論*, No.01-1, Vol.1, (2001-8), 441-442.
- (8) Chen, M. C. and Tang, R. J., An explicit tensor expression for the fundamental solutions of a bimaterial space problem, *Appl. Math. Mech.*, **18**(1997), 331-340
- (9) Lee, J. C., Farris, T.N. and Keer, L. M., Stress intensity factors for cracks of arbitrary shape near an interfacial boundary, *Engng. Fract. Mech.*, **27**(1987), 27-41
- (10) Tang, R. J. and Qin, T. Y., Method of hypersingular integral equations in three-dimensional fracture mechanics, *Acta Mechanica Sinica*, **25**(1993), 665-675